

## 4. ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОДНОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

### Примеры

4.1. Последовательно с резистором включен амперметр класса точности 0,5 с диапазоном показаний (0...5) А. Показание амперметра  $I = 2,000$  А; существенна только основная погрешность прибора. Номинальное значение сопротивления резистора  $R = 1$  Ом; предел допускаемого относительного отклонения реального сопротивления от номинального  $\delta_{Rп} = 0,5$  %.

Определите мощность рассеяния резистора  $P_{\text{расс}}$ . Представить результат в виде доверительного интервала для доверительной вероятности  $P = 1$ .

*Решение:*

$$P_{\text{расс}} = I^2 R = 4,000 \text{ Вт};$$

\* 1-й способ

$$P_{\text{расс}} = I^2 R;$$

$$\Delta_{\text{п}} = \left| \frac{\partial P_{\text{расс}}}{\partial I} \right| \Delta_{I\text{п}} + \left| \frac{\partial P_{\text{расс}}}{\partial R} \right| \Delta_{R\text{п}};$$

$$\Delta_{I\text{п}} = \gamma_{0,\text{п}} (I_N / 100 \%) = 0,025 \text{ А};$$

$$\Delta_{R\text{п}} = \delta_{R\text{п}} (R / 100 \%) = 0,005 \text{ Ом};$$

$$\frac{\partial P_{\text{расс}}}{\partial I} = 2 I R = 4,000 \text{ В};$$

$$\frac{\partial P_{\text{расс}}}{\partial R} = I^2 = 4,000 \text{ А}^2;$$

$$\Delta_{\text{п}} = 0,12 \text{ Вт};$$

$$\text{Ответ 1: } (4,00 \pm 0,12) \text{ Вт}; P = 1.$$

\* 2-й способ

$$P_{\text{расс}} = \prod_{i=1}^2 (a_i x_i^{b_i}); x_1 = I; x_2 = R; a_1 = a_2 = 1; b_1 = 2; b_2 = 1;$$

$$\delta_{\text{п}} = |b_1| \delta_{1,\text{п}} + |b_2| \delta_{2,\text{п}} = 2 \delta_{I\text{п}} + \delta_{R\text{п}};$$

$$\delta_{I\text{п}} = \gamma_{0,\text{п}} (I_N / I) = 1,25 \text{ \%};$$

$$\delta_{\text{п}} = 3,0 \text{ \%};$$

$$\Delta_{\text{п}} = \delta_{\text{п}} (P_{\text{расс}} / 100 \%) = 0,12 \text{ Вт};$$

$$\text{Ответ 2: } (4,00 \pm 0,12) \text{ Вт}; P = 1.$$

4.2. Необходимое электрическое сопротивление цепи в ряде случаев приходится создавать тем или иным соединением двух и более стандартных резисторов.

Пусть имеются два резистора,  $R_1$  и  $R_2$ , со следующими номинальными значениями сопротивления и пределами допускаемого относительного отклонения реального сопротивления от номинального:  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 3$  кОм,  $\delta_{R1\text{п}} = 0,2$  %,  $\delta_{R2\text{п}} = 1,0$  %.

Определите номинальные значения эквивалентных сопротивлений  $R_{\text{пос}}$  и  $R_{\text{пар}}$ , соответствующих последовательному и параллельному соединениям резисторов  $R_1$  и  $R_2$ , и пределы допускаемых относительных отклонений реальных эквивалентных сопротивлений от  $R_{\text{пос}}$  и  $R_{\text{пар}}$ .

*Решение:*

последовательное соединение

$$R_{\text{пос}} = R_1 + R_2 = 4 \text{ кОм};$$

$$\Delta_{\text{п}} = \left| \frac{\partial R_{\text{пос}}}{\partial R_1} \right| \Delta_{R1\text{п}} + \left| \frac{\partial R_{\text{пос}}}{\partial R_2} \right| \Delta_{R2\text{п}};$$

$$\delta_{\text{п}} = (\delta_{R1\text{п}} R_1 + \delta_{R2\text{п}} R_2) / R_{\text{пос}} = 0,8 \text{ \%}.$$

параллельное соединение

$$R_{\text{пар}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 0,75 \text{ кОм};$$

\* 1-й способ

$$\Delta_{\text{п}} = \left| \frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_1} \right| \Delta_{R1\text{п}} + \left| \frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_2} \right| \Delta_{R2\text{п}};$$

$$\delta_{\text{п}} = \left( \left| \frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_1} \right| \delta_{R1\text{п}} R_1 + \left| \frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_2} \right| \delta_{R2\text{п}} R_2 \right) / R_{\text{пар}};$$

$$\frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_1} = [R_2 / (R_1 + R_2)]^2 = 9/16;$$

$$\frac{\partial R_{\text{пар}}}{\partial R_2} = [R_1 / (R_1 + R_2)]^2 = 1/16;$$

$$\delta_{\text{п}} = 0,4 \text{ \%}.$$

\* 2-й способ

$$Y_{\text{пар}} = Y_1 + Y_2; \quad Y_1 = 1 / R_1; \quad Y_2 = 1 / R_2;$$

$$\delta_{Yi\text{п}} = \delta_{Ri\text{п}}; \quad i = 1,2;$$

$$\Delta_{Y\text{пар.п}} = \Delta_{Y1\text{п}} + \Delta_{Y2\text{п}};$$

$$\Delta_{Yi\text{п}} = \delta_{Y\text{п}} Y_i = \delta_{R,\text{п}} / R_i;$$

$$\delta_{\text{п}} = (\Delta_{Y1\text{п}} + \Delta_{Y2\text{п}}) / Y_{\text{пар}} = (\delta_{R1\text{п}} / R_1 + \delta_{R2\text{п}} / R_2) R_{\text{пар}} = 0,4 \text{ \%}.$$

4.3. Угол сдвига фаз между двумя синусоидальными напряжениями измеряется с помощью электронно-лучевого осциллографа методом эллипса. При этом искомый угол рассчитывается по формуле:  $\varphi = \arcsin (H_1 / H_2)$ , где  $H_1$  — расстояние между точками пересечения эллипса с вертикальной секущей, проведенной через центр эллипса,  $H_2$  — высота прямоугольника, в который вписывается эллипс.

Измеренные значения —  $H_1 = 40$  мм,  $H_2 = 50$  мм. Толщина луча осциллографа —  $b = 1$  мм.

Полагая, что существенна только визуальная погрешность измерения (т.е. погрешность измерения расстояний, предельное значение которой  $\Delta_{\text{в.п}} = 0,4 \cdot b$ ), представить результат измерения угла сдвига фаз в виде доверительного интервала для доверительной вероятности, равной 1.

*Решение:*

$$\varphi = \arcsin (H_1 / H_2) \approx 0,9273 \text{ рад};$$

$$\Delta_{\text{п}} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial H_1} \right| \Delta_{\text{в.п}} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial H_2} \right| \Delta_{\text{в.п}};$$

$$\begin{aligned}
x &= H_1 / H_2; \\
\partial\varphi / \partial H_1 &= (\partial\varphi / \partial x) (\partial x / \partial H_1); \\
\partial\varphi / \partial H_2 &= (\partial\varphi / \partial x) (\partial x / \partial H_2); \\
\partial\varphi / \partial x &= (1 - x^2)^{-0,5} = 5/3 \text{ рад}; \\
\partial x / \partial H_1 &= 1 / H_2 = 0,02 \text{ мм}^{-1}; \\
\partial x / \partial H_2 &= -H_1 / H_2^2 = -0,016 \text{ мм}^{-1}; \\
\Delta_{\text{в1п}} &= \Delta_{\text{в2п}} = 0,4 \text{ мм}; \\
\Delta_{\text{п}} &= 0,024 \text{ рад}; \\
\text{Ответ: } &(0,927 \pm 0,024) \text{ рад}; P = 1.
\end{aligned}$$

4.4. Измерение коэффициента усиления усилителя напряжения  $K_U$  выполняется с помощью цифрового милливольтметра; при этом измеряются напряжения на входе и выходе усилителя —  $U_{\text{вх1}}, U_{\text{вых1}}, U_{\text{вх2}}, U_{\text{вых2}}$ , а значение  $K_U$  вычисляется по формуле:  $K_U = (U_{\text{вых1}} - U_{\text{вых2}}) / (U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}})$ .

Измеренные значения напряжений:

$$U_{\text{вх1}} = 200,0 \text{ мВ}, U_{\text{вых1}} = 605,3 \text{ мВ}, U_{\text{вх2}} = 100,0 \text{ мВ}, U_{\text{вых2}} = 305,3 \text{ мВ}.$$

Полагая, что существенна только погрешность квантования цифрового вольтметра (значение которой по абсолютной величине не превышает половины ступени квантования), представить результат измерения коэффициента усиления в виде двух доверительных интервалов для доверительных вероятностей, равных 1 и 0,95.

Решение:

$$K_U = 3;$$

$$P = 1$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{п}} &= \left| \partial K_U / \partial U_{\text{вх1}} \right| \Delta_{U_{\text{вх1п}}} + \left| \partial K_U / \partial U_{\text{вх2}} \right| \Delta_{U_{\text{вх2п}}} + \\
&+ \left| \partial K_U / \partial U_{\text{вых1}} \right| \Delta_{U_{\text{вых1п}}} + \left| \partial K_U / \partial U_{\text{вых2}} \right| \Delta_{U_{\text{вых2п}}};
\end{aligned}$$

$$\Delta_{U_{\text{вх1п}}} = \Delta_{U_{\text{вх2п}}} = \Delta_{U_{\text{вых1п}}} = \Delta_{U_{\text{вых2п}}} = 0,05 \text{ мВ};$$

$$\partial K_U / \partial U_{\text{вх1}} = -K_U / (U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}) = -0,03000 \text{ мВ}^{-1};$$

$$\partial K_U / \partial U_{\text{вх2}} = K_U / (U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}) = 0,03000 \text{ мВ}^{-1};$$

$$\partial K_U / \partial U_{\text{вых1}} = K_U / (U_{\text{вых1}} - U_{\text{вых2}}) = 0,01000 \text{ мВ}^{-1};$$

$$\partial K_U / \partial U_{\text{вых2}} = -K_U / (U_{\text{вых1}} - U_{\text{вых2}}) = -0,01000 \text{ мВ}^{-1};$$

$$\Delta_{\text{п}} = 0,0040.$$

$$\text{Ответ 1: } (3,0000 \pm 0,0040); P = 1.$$

$$P = 0,95$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{гр}}(P) &= K_P \cdot \left\{ \left[ (\partial K_U / \partial U_{\text{вх1}}) \Delta_{U_{\text{вх1п}}} \right]^2 + \right. \\
&+ \left[ (\partial K_U / \partial U_{\text{вх2}}) \Delta_{U_{\text{вх2п}}} \right]^2 + \\
&+ \left[ (\partial K_U / \partial U_{\text{вых1}}) \Delta_{U_{\text{вых1п}}} \right]^2 + \\
&+ \left. \left[ (\partial K_U / \partial U_{\text{вых2}}) \Delta_{U_{\text{вых2п}}} \right]^2 \right\}^{0,5};
\end{aligned}$$

$$\Delta_{\text{гр}}(P) \approx 0,0025;$$

$$\text{Ответ 2: } (3,0000 \pm 0,0025); P = 0,95.$$

### Задачи для самостоятельного решения

4.5. Милливольтметром класса точности 0,5 с диапазоном измерений (0...150) мВ, со шкалой, содержащей 150 делений, в нормальных условиях измеряется  $u = U_1 - U_2$  — изменение напряжения на выходе источника, выходное сопротивление которого пренебрежимо мало. С округлением до 1 дел. по шкале сделаны отсчеты:  $a_1 = 50$  дел.,  $a_2 = 40$  дел.

Представьте результат измерения с указанием погрешности для доверительной вероятности, равной 0,95.

4.6. Определите значение взаимной индуктивности двух катушек индуктивности  $M$ , границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения для доверительной вероятности, равной 1, и представьте результат измерения в установленном виде. Измерены значения суммарной индуктивности катушек при согласном и встречном их включении:  $L_c = 0,365$  Гн;  $L_b = 0,305$  Гн. Взаимная индуктивность вычисляется по формуле  $M = (L_c - L_b) / 4$ . Предел допускаемой относительной погрешности измерения индуктивности равен 1,0 %.

4.7. Определите значение круговой частоты  $\omega$  синусоидального напряжения, границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $\omega$  для доверительной вероятности, равной 1, и представьте результат измерения в установленном виде. Измерение выполняется при помощи электронно-лучевого осциллографа. Длина отрезка, соответствующего периоду напряжения,  $L = 40$  мм; толщина луча равна  $b = 1$  мм; коэффициент развертки  $k_p = 20$  мс/см; предел допускаемой относительной погрешности  $k_p$  равен 5,0 %. Предельное значение визуальной погрешности  $\Delta_{в.п} = 0,4 \cdot b$ .

4.8. Определите значение коэффициента усиления  $K_U$  усилителя напряжения, границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $K_U$  для доверительной вероятности, равной 0,99, и представьте результат измерения в установленном виде. Формула для расчета коэффициента усиления:  $K_U = (U_{\text{вых1}} - U_{\text{вых0}}) / U_{\text{вх1}}$ .

Напряжения измеряются вольтметром класса точности 0,1/0,05; диапазоны измерений: для  $U_{\text{вых0}}$  и  $U_{\text{вх1}}$  — (0...100) мВ, для  $U_{\text{вых1}}$  — (0...10) В. Измеренные значения:  $U_{\text{вх1}} = 50,00$  мВ;  $U_{\text{вых0}} = 64,00$  мВ;  $U_{\text{вых1}} = 6,464$  В. Существенна только основная погрешность вольтметра.

4.9. Определите значение энергии, полученной нагрузкой от источника постоянного напряжения за время  $t$ . Сопротивление нагрузки измерено с помощью моста до подключения ее к источнику, а напряжение на нагрузке — с

помощью вольтметра после подключения. Предполагается, что напряжение на нагрузке и сопротивление нагрузки за время  $t$  не изменяются. Показание, диапазон показаний и класс точности вольтметра, соответственно: 200,0 В; (0...300) В; 0,5. То же для моста: 100,0 Ом; (0...200) Ом; (1,0). Существенны только основные погрешности приборов. Измеренное значение времени  $t$  и предел допускаемой погрешности его измерения равняются соответственно 120 с и 1 с. Для доверительной вероятности, равной 0,95, найдите границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения энергии и представьте результат измерения в установленном виде.

4.10. На вход вольтметра магнитоэлектрической системы подано периодическое напряжение, имеющее форму прямоугольных однополярных импульсов со скважностью  $Q = 4,000 \pm 0,040$ . Показание, диапазон показаний и класс точности вольтметра соответственно: 10,0 В; (0...15) В; 1,0. Полагая, что существенна только основная погрешность вольтметра, определите амплитуду импульсов  $U_m$ , границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $U_m$  для доверительной вероятности, равной 1, и представьте результат измерения в установленном виде.

4.11. Для определения выходного сопротивления источника напряжения  $R_{\text{и}}$  измерено его выходное напряжение на холостом ходу и под нагрузкой. Номинальное значение сопротивления нагрузки и предел допускаемого отклонения от него равны соответственно 2 кОм и 1 %. Диапазон показаний, класс точности, показания вольтметра для ненагруженного и нагруженного источника соответственно: (0...10) В; 0,2/0,1; 5,50 В; 5,00 В. Полагая, что существенна только основная погрешность вольтметра, определите границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $R_{\text{и}}$  для доверительной вероятности, равной 1, и представьте результат измерения  $R_{\text{и}}$  в установленном виде.

4.12. Определите значение активного сопротивления  $R$  катушки индуктивности, границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $R$  для доверительной вероятности, равной 1, и представьте результат измерения в установленном виде. Измерены значения индуктивности и добротности катушки:  $L = 30,5$  мГн;  $Q=5,6$ . Данные применяемого моста переменного тока: пределы допускаемых относительных погрешностей при измерении  $L$  и  $Q$  — соответственно 1,0 % и 5,0 %; частота питающего напряжения —  $(1000 \pm 50)$  Гц.

4.13. На вход вольтметра магнитоэлектрической системы подано напряжение, имеющее форму прямоугольных однополярных импульсов со скважностью  $Q = 4,000 \pm 0,040$ . Показание, диапазон показаний и класс

точности вольтметра соответственно: 80,0 В; (0...100) В; 1,0. Полагая, что существенна только основная погрешность вольтметра, определите среднеквадратическое значение напряжения  $U$ , границы доверительного интервала допускаемой погрешности измерения  $U$  для доверительной вероятности, равной 1 и представьте результат измерения в установленном виде.

4.14. Номинальное значение сопротивления резистора и предел допускаемого отклонения от него равны соответственно 5,1 кОм и 0,2 %. Определите аналогичные параметры второго резистора, который, будучи подключен параллельно первому, обеспечит получение эквивалентного сопротивления с номинальным значением 5 кОм и пределом допускаемого отклонения от него не более 0,25 %.

## ОТВЕТЫ

- 1.15:** 5,1%. **1.16:** - 0,33 %. **1.17:** от 7,5 В до 30 В. **1.18:** нет (0,48 %).
- 1.19:** от 49,65 В до 50,35 В. **1.20:** 1 с. **1.21:** 10. **1.22:** 0,001 В + 0,0002 U. **1.23:** 2 кОм.
- 1.24:** 100 МОм. **1.25:** не более 0,5 мОм. **1.26:** не менее 10 ТОм. **1.27:** не менее 100 кГц.
- 1.28:** не более 63 Ом. **1.29:** 1 %. **1.30:** 1 %. **1.31:** 2,6 %. **1.32:** не менее 5 мкФ.
- 1.33:** от -1 В до 0. **1.34:** от -1,7 В до 0. **1.35:** от -10 мВ до 0. **1.36:** от -0,20 мА до 0.
- 1.37:** от -5,0 мкА до 0. **1.38:** от -1,0 мА до 0.
- 
- 2.5:** 3 мкВ<sup>2</sup>. **2.6:** 1/3. **2.7:**  $13 \times 10^3$  мкВ<sup>2</sup>. **2.8:** 300 мкВ. **2.9:** 0,505. **2.10:** 0,6. **2.11:** 1.
- 2.12:** 1,0 мВ. **2.13:** 0,010 мВ<sup>2</sup>. **2.14:** 0,75.
- 
- 3.5:**  $(0,2633 \pm 0,0025)$  В;  $P = 0,95$ . **3.6:**  $(0,759 \pm 0,016)$  А;  $P = 1$ . **3.7:**  $(55,1 \pm 1,4)$  В;  $P = 0,99$ .
- 3.8:**  $(82,64 \pm 0,50)$  мА;  $P = 1$ . **3.9:**  $(500,52 \pm 0,23)$  мВ;  $P = 1$ . **3.10:**  $(27,50 \pm 0,69)$  мкА;  $P = 0,9$ .
- 3.11:**  $(507,5 \pm 4,5)$  мВ;  $P = 0,95$ . **3.12:**  $(51,1 \pm 3,6)$  В;  $P = 0,9$ .
- 3.13:**  $(149,950 \pm 0,094)$  Ом;  $P = 0,99$ . **3.14:**  $(50,1 \pm 6,9)$  В;  $P = 1$ .
- 3.15:**  $(3,0030 \pm 0,0065)$  В;  $P = 1$ . **3.16:**  $(1,897 \pm 0,092)$  В;  $P = 0,99$ .
- 3.17:**  $(255,0 \pm 9,8)$  А;  $P = 0,9$ . **3.18:**  $(563 \pm 20)$  В;  $P = 1$ . **3.19:**  $(84,01 \pm 0,43)$  мА;  $P = 0,99$ .
- 3.20:**  $(160,844 \pm 0,062)$  В;  $P = 1$ . **3.21:**  $(27,5 \pm 1,1)$  мкА;  $P = 1$ . **3.22:**  $(825,0 \pm 8,3)$  мВ;  $P = 1$ .
- 3.23:**  $(26,3 \pm 2,5)$  В;  $P = 1$ .
- 
- 4.5:**  $(10,0 \pm 1,4)$  мВ;  $P = 0,95$ . **4.6:**  $(15,0 \pm 1,7)$  мГн;  $P = 1$ . **4.7:**  $(78,5 \pm 4,7)$  рад/с;  $P = 1$ .
- 4.8:**  $(128,00 \pm 0,35)$ ;  $P = 0,99$ . **4.9:**  $(48,0 \pm 1,0)$  кДж;  $P = 0,95$ . **4.10:**  $(40,0 \pm 1,0)$  В;  $P = 1$ .
- 4.11:**  $(200 \pm 15)$  Ом;  $P = 1$ . **4.12:**  $(34,2 \pm 3,8)$  Ом;  $P = 1$ . **4.13:**  $(160,0 \pm 2,8)$  В;  $P = 1$ .
- 4.14:**  $R_{2НОМ} = 255$  кОм;  $\delta_{п2} = 2,8$  %.

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\Delta$  — абсолютная погрешность;
- $\delta$  — относительная погрешность;
- $\gamma$  — приведенная погрешность;
- $\Delta_{п.н}$  — нижнее предельное значение доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1;
- $\Delta_{п.в}$  — верхнее предельное значение доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1;
- $\Delta_{п}$  — предельное значение для симметричного доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1 ( $\Delta_{п} = \Delta_{п.в} = -\Delta_{п.н}$ );
- $\Delta_{гр}(P)$  — граничное значение для симметричного доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности  $P < 1$  (всегда  $\Delta_{гр}(P) < \Delta_{п}$ );
- $K_P$  — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности  $P$ , используемый при вычислении  $\Delta_{гр}(P)$ :  $K_P(P=0,9) = 0,95$ ;  $K_P(P=0,95) = 1,1$ ;  $K_P(P=0,99) = 1,4$ ;
- $\Delta_0$  — основная погрешность;
- $\Delta_T$  — дополнительная температурная погрешность;
- $\Delta_f$  — дополнительная частотная погрешность;
- $K_{в.т}$  — коэффициент влияния температуры; по умолчанию принимается равным  $\Delta_{0.л} / 10$  °С;
- $\Delta_{отс}$  — погрешность отсчитывания;
- $\Delta_{вз}$  — погрешность взаимодействия;
- $\Delta_{вз.н}$  — нижнее предельное значение доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности, равной 1;
- $\Delta_{вз.в}$  — верхнее предельное значение доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности, равной 1;
- $\Delta_{вз.п}$  — предельное значение симметричного доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности, равной 1;
- $\eta$  — поправка для измеренного значения, численно равная систематической составляющей погрешности измерения, взятой с противоположным знаком;
- $c_x$  — цена деления аналогового измерительного прибора;
- $q$  — 1) степень квантования при интерполяции отсчета аналогового измерительного прибора; 2) степень квантования цифрового измерительного прибора;
- $R_V$  — входное сопротивление вольтметра;
- $x_{с.в}$  — модуль емкостного сопротивления вольтметра;
- $R_A$  — входное сопротивление амперметра.